XIV. APÀCZAI MATEMATIKA VERSENY

ANK TEHETSÉGPONT

A 9/AJTP, 9/KNy, 9/N, 9/Ny osztályok országos versenye

Országos döntő - 2020. november 17.

Pontozási útmutató

1. Feladat: Egyszer néhány fiú horgászni ment a közeli tóhoz. Egyikük 6 halat fogott, a többiek fejenként 13-at. Egy másik alkalommal egy másik fiúcsapat ment horgászni, ezúttal egyikük 5 halat fogott, a többiek fejenként 10-et. Tudjuk még, hogy mindkét alkalommal összesen ugyanannyi halat fogtak, méghozzá 100-nál többet, de 200-nál nem többet. Hányan mentek horgászni az első alkalommal, és hányan a második alkalommal? **8p**

Megoldás:

Ha első alkalommal k + 1 fiú ment horgászni, akkor 13k + 6 darab halat fogtak. **1p**

Ha a második alkalommal n + 1-en mentek, akkor 10n + 5-öt. **1p**

Tudjuk, hogy ez a két szám egyenlő, és 100-nál nagyobb, de legfeljebb 200. **1p**

Ebben a tartományban a következő 13-mal osztva 6 maradékot adó számok vannak:
110; 123; 136; 149; 162; 175; 188: **2p**

A második alkalom miatt tudjuk, hogy a fogott halak száma 5-re végződik, így láthatjuk, hogy egyedül a 175 lehetséges. **1p**

Ebből következően első alkalommal 14-en, második alkalommal pedig 18-an mentek horgászni. **2p**

2. megoldás

$13x+6= 10y+5$ ebből **1p**

$y=\frac{13x+1}{10}=x+\frac{3x+1}{10}$, ahol x és y egész **1p**

Ebből x=3, 13, 23, … **2p**

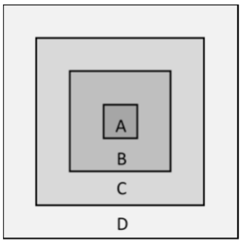
A $100<13x+6<:=200$ feltételből (x egész)

$x>7$ és $x<=14$ következik, **2p**

ezért x csak 13 lehet, y pedig 17. **1p**

Tehát az első alkalommal 14-en, a második alkalommal 18-an mentek horgászni. **1p**

2. Feladat: Az ábrán egy céltábla látható. Célba lövéskor a pontszámok fordítottan arányosak az eltalált táblarész területével. Tudjuk, hogy a B rész 6 pontot ér. Mennyit ér az A, a C és a D területrész? (Az ábrán látható négyzetek középpontja egybe esik, a szomszédos, egymással párhuzamos oldalak távolsága megegyezik a legkisebb négyzet oldalhosszúságával.) **8p**



Megoldás:

Ha az A rész területe 1 egység, akkor a B részé 8, **2p**

a C részé 16, **1p**

a D részé pedig 24. **1p**

Ha a megfelelő részek pontszáma rendre a; b; c; d, akkor a fordított arányosság alapján azt kapjuk, hogy $24 \cdot d = 16 \cdot c = 8 \cdot b = 1 \cdot a$ **2p**

Tudjuk, hogy b = 6, $\Rightarrow$ $8 \cdot b = 8 \cdot 6 = 48$. Így kapjuk, hogy a = 48, c = 3 és d = 2. **2p**

3. Feladat: A tangó páros tánc, amelynek egyik tagja nő, a másik tagja pedig férfi.

A bálban nem voltak 50-nél többen. Egyik pillanatban a férfiak 3/4 –e tangózott,

a nők 4/5-ével . Hányan tangóztak abban a pillanatban? **10p**

Megoldás.

Férfiak száma legyen x, a nők száma legyen y.

$x + y \le 50$ **1p**

Táncolók: férfiak $\frac{3}{4}x \rightarrow$ x osztható 4-gyel, nők $\frac{4}{5}y$ $\rightarrow$ y osztható 5-tel. **2p**

$\frac{3}{4}x = \frac{4}{5}y$ **1p**

$x = \frac{16}{15}y \Rightarrow \frac{16}{15}y + y \le 50$ $\Rightarrow$ y osztható 3-mal is. **1p**

$\frac{31}{15}y \le 50 \Rightarrow y \le \frac{750}{31}$ **1p**

$y \le 24$ **1p**

Tudjuk, hogy 5 és 3 osztója y-nak, ezért y lehetséges értéke csak 15 lehet. **1p**

$x = \frac{16}{15} \cdot y = \frac{16}{15} \cdot 15 = 16$

A bálban 16 férfi és 15 nő vett részt. **1p**

Táncolt $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$ férfi és 12 nő. Összesen 24-en táncoltak. **1p**

2. megoldás

Férfiak száma legyen x, a nők száma legyen y.

$x + y \le 50$ **1p**

$\frac{3}{4}x = \frac{4}{5}y$ **1p**

ebből $x = y + \frac{1}{15}y$ ahol x és y egész **1p**

ebből y= 15, 30, 45, … **2p**

Az $x + y \le 50$ feltétel miatt y csak 15, 30, 45 lehet, **2p**

ekkor x rendre 16, 32, 47 lehet, **1p**

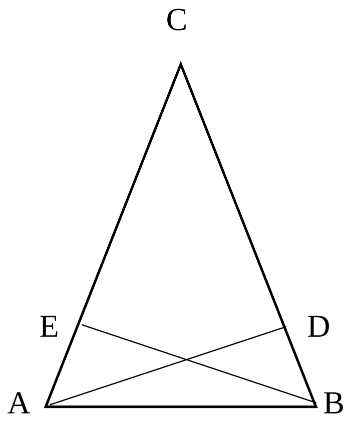
ezekből az előző feltétel miatt csak az első számpár megfelelő, vagyis y=15, x=16 . **1p**

A férfiak ¾-e 12, tehát 12 pár, vagyis 24 ember táncolt. **1p**

4. Feladat: Az ABC háromszög A csúcsából induló magasságvonal az AB oldallal fele akkora szöget zár be, mint az AC oldallal. Ugyanígy a B csúcsból induló magasságvonal is fele akkora szöget zár be az AB oldallal, mint a BC oldallal. Mekkorák a háromszög szögei?

10p

Megoldás:



Legyen D az A-ból induló, E pedig a B-ből induló magasság talppontja a szemközti oldalon.

Illetve jelöljük a DAB szöget δ -val, az ABE szöget pedig ε -nal.

Ekkor $CAD\sphericalangle = 2\delta$ és $CBE\sphericalangle = 2\varepsilon$. **1p**

Mivel az ABE és ABD derékszögű háromszög, azt kapjuk, hogy $3\delta + \varepsilon = 90°$

és $3\varepsilon + \delta = 90°$: **2p**

Összeadva kapjuk, hogy $4\delta + 4\varepsilon = 180°$, **1p**

amiből következik, hogy $\delta + \varepsilon = 45°$. **1p**

A két egyenletből adódik, hogy $2\delta = 45°$ és $2\varepsilon = 45°$. **2p**

Vagyis $\delta = \varepsilon = 22{,}5°$ **1p**

A háromszög eredeti szögei: $\alpha = 3\delta$, $\beta = 3\varepsilon$, γ .

Így a háromszög szögei: α=67, 5°; β= 67,5°; γ =45°. **2p**

5. Feladat: Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely osztható mindkét számjegyével? **12p**

Megoldás:

Jelölje a szám tízes helyi értéken álló számjegyét ***a*** , az egyes helyi értéken álló számjegyét ***b.***

A feladat feltétele szerint ***a*** osztója $10 \cdot a + b$ összegnek, ezért ***a*** osztója ***b***-nek. **1p**

Tehát $b = a \cdot c$. **1p**

Mivel ***b*** is osztója $10 \cdot a + b$ összegnek, ezért ***b*** osztója $10 \cdot a$ -nak. **2p**

Ha *c*=1, akkor *a*=*b.* Ilyen számok a 11, 22,33,44,55,66,77,88,99, tehát 9 lehetőség van. **2p**

Ha c=2, akkor $b = 2 \cdot a$. Ilyen számok

$10 \cdot 1 + 2 = 12, \quad 10 \cdot 2 + 4 = 24,$
$10 \cdot 3 + 6 = 36, \quad 10 \cdot 4 + 8 = 48$ **2p**

Tehát 4 lehetőségünk van. **1p**

Ha c=5, akkor $10 \cdot 1 + 5 = 15$ ad megoldást. **1p**

A ***b*** osztója ***10a***-nak feltétel miatt más lehetősség nincs. **1p**

Összesen 14 ilyen tulajdonságú szám létezik. **1p**

6. Feladat: A következő táblázatból Andris és Béla felváltva kihúznak egy-egy számot úgy, hogy a végén csak egy szám marad. Kiderült, hogy az Andris által kihúzott számok összege háromszorosa a Béla által kihúzott számok összegének. Melyik szám maradt meg a végén a táblázatban? Milyen számokat húzott ki Béla?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

12p

Megoldás:

Legyen a megmaradt szám m, és x a Béla által kihúzott számok összege. Ekkor az Andris által kihúzott számok összege 3x, azaz az összes kihúzott szám összege 4x. **2p**

A táblázatban szereplő összes szám összege 1 + 2 + 3 +4 +5+6+7+8 + 9 = 45.

Tehát 45 = 4x + m. **2p**

Ha x ≥ 12, akkor 4x ≥ 48, m nem lehetne pozitív. **2p**

Ha x = 11, akkor m = 1. Viszont ekkor a Béla által kihúzott számok összege legalább 2+3+4+5 = 14 > 11, ami nem lehet. **2p**

Ha x = 10, akkor m = 5, ami lehet. Ekkor a Béla által kihúzott számok összege legalább 1 + 2 + 3 + 4 = 10, **2p**

x ≤ 9 nem lehet, mert a Béla által kihúzott számok összege legalább 1 + 2 + 3 + 4 = 10. **1p**

Tehát Béla által kihúzott számok: 1, 2, 3, 4. **1p**

2. megoldás

Jelölje X a Béla által kihúzott számok összegét, akkor az András által húzottak összege 3x, az összes kihúzott szám összege 4x **2p**

Tehát az összes kihúzott szám összege 4-gyel osztható. **1p**

A táblázatban szereplő 9 szám összege 45, közülük 1-gyet kell kihagynunk úgy, hogy az összeg 4-gyel osztható legyen. **1p**

Erre csak három lehetőség van: 1 (marad 44), 5 (marad 40), 9 (marad 36) **1p**

Ha az 1 marad ki, akkor 4x=44, x=11, 3x=33 nem lehet, mert az András által húzott számok összege akkor a legnagyobb, ha a 4 legnagyobb számot húzza (6, 7, 8, 9), ezek összege 30. **2p**

Ha a 9 marad ki, akkor 4x=36, x=9, 3x=27. Ez nem lehet, mert a Béla által kihúzott számok összege akkor a legkisebb, ha a 4 legkisebb számot húzza (1, 2, 3, 4), ezek összeg 10. **2p**

Ha az 5 marad ki, akkor 4x=40, x=10, 3x=30, ez akkor lehet, ha Béla az 1, 2, 3, 4-et, András a 6, 7, 8, 9-et húzza ki. **2p**

Tehát Az 5 marad végül a táblázatban, Béla az 1, 2, 3, 4 számokat húzza ki. **1p**

3. megoldás

Jelölje X a Béla által kihúzott számok összegét, akkor az András által húzottak összege 3x, az összes kihúzott szám összege 4x **2p**

A Béla által húzott számok összege akkor a legkisebb, ha Béla a 4 legkisebb számot húzza ki, (1+2+3+4=10), vagyis x>=10. (1) **3p**

Az András által kihúzott számok összege akkor a legnagyobb, ha a 4 legnagyobbat húzza (6, 7, 8, 9), ezek összege 30. Tehát 3x<=30, ebből x<=10 (2) **3p**

Az (1) és (2) egyenlőtlenségek egyszerre akkor és csak akkor teljesülnek, ha x=10. **2p**

Ekkor 4x=40, tehát az 5 marad ki, és Béla az 1, 2, 3, 4-et húzta. **2p**