Iskolai forduló 2020. február 25.

Megoldások

1. feladat:

Két könyvszekrényben összesen 160 könyv van. Ha az elsőben lévő könyvek harmadát és még hatot átteszünk a másodikba, akkor ugyanannyi lesz mindkettőben. Hány könyv volt eredetileg egy-egy könyvszekrényben? Végezz ellenőrzést! **8p**

1. Megoldás:

Egyik könyvszekrényben legyen x, akkor a másikban 160-x könyv **1p**

Elsőből átteszünk $\frac{x}{3}+6$ könyvet a másodikba, akkor az elsőben marad $\frac{2}{3}\cdot x-6$ **1p**

A másodikban lesz $160-x+\frac{x}{3}+6$ könyv. **1p**

Ez a két mennyiség megegyezik, tehát $\frac{2}{3}\cdot x-6=160-x+\frac{x}{3}+6$ **1p**

$\frac{2}{3}\cdot x=172-\frac{2}{3}\cdot x$ **1p**

$\frac{4}{3}\cdot x=172$ **1p**

$x=129$

Tehát az egyik szekrényben 129 könyv van, a másikban 31. **1p**

Ellenőrzés: $\frac{129}{3}+6=43+6=49$ könyvet teszünk a második szekrénybe. Marad az elő szekrényben $129-49=80$ könyv, ami pontosan a 160 könyv fele. **1p**

2. Megoldás

Legvégül mindkét polcon 80 – 80 könyv lesz 2p

Az utolsó előtti állapotban az 1. polcon 86, a 2. polcon 74 könyv volt 1p

A 86-ot úgy kaptuk, hogy az 1. polcon lévő könyvek harmadát elvettük, ezért a 86 az eredeti mennyiség 2/3-a 2p

Ezért 1/3 rész 86/2 = 43-mal egyezik meg. 1p

Az 1. polcon eredtileg lévő könyvek száma 3/3 rész, vagyis 3-szor 43 = 129 1p

A 2. polcon ezért 160 – 129 = 31 könyv van. 1p

2. feladat:

Három különböző természetes szám összege 54. Az egyik szám a másik kettő átlaga, és mindegyik osztható 6-tal. Adjuk meg mind a három számot. Hány megoldás létezik?

10p

1. **Megoldás:**

Jelöljük a három számot a-val, b-vel, c-vel.

A feladat szerint mindegyik osztható 6-tal, ezért $a = 6 \cdot x, \quad b = 6 \cdot y, \quad c = 6z$

$6 \cdot x + 6 \cdot y + 6 \cdot z = 54$ **1p**

$x + y + z = 9$

Ha feltesszük, hogy $a < b < c \Rightarrow x < y < z$, akkor $y = \frac{x+z}{2}$ **1p**

Ebből következik $2 \cdot y = x + z$ **1p**

$x + y + z = 9 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot y = 9$ **1p**

$y = 3$ **1p**

A középső szám $c = 18$ **1p**

Ha $a = 0, \quad akkor \quad c = 36$ **1p**

Ha $a = 6, \quad akkor \quad c = 30$ **1p**

Ha $a = 12, \quad akkor \quad c = 24$ **1p**

Ha $a = 18, \quad akkor \quad c = 18$, de ekkor a számok nem különbözőek.

Tehát három ilyen számhármas létezik. **1p**

2. **Megoldás**

A 6-tal osztható nem negatív egészek, amelyek szóba jöhetnek:

0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 1p

Mivel a középső szám a két szélső számtani közepe, ezért a nagyobbik ugyanannyival nagyobb a középsőnél, mint amennyivel a középső nagyobb a kisebbiknél. Ezért a 3 szám összege (54) a középső háromszorosa. Ezért a középső szám 54/3 = 18. 3p

A fenti számsorból a 18-ra szimmetrikusan elhelyezkedő számok jöhetnek szóba. 2p

Ezek:

12, 18, 24 1p

6, 18, 30 1p

0, 18, 36 1p

Több lehetőség nincs.

Mindhárom számhármas összege 54, és a 18 mindhárom esetben a két másik számtani közepe, ezért mindhárom számhármas jó megoldás. 1p

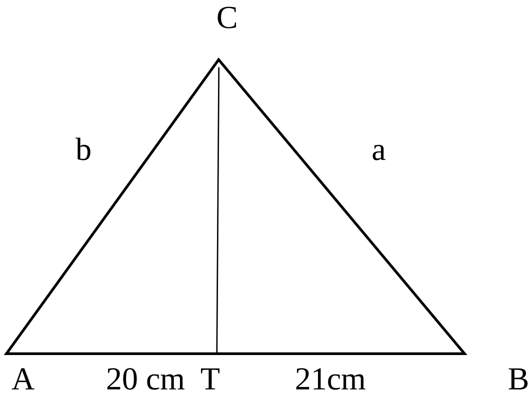
3. feladat:

Egy háromszög $\overline{AB}$ oldalát a hozzá tartozó magasság 20 cm és 21 cm-es részekre osztja. Számítsuk ki a háromszög oldalainak a hosszát, ha tudjuk, hogy az $\overline{AB}$ oldalon fekvő nagyobbik szög 45°-os. **10p**

Megoldás:

Jelöljük a magasság hosszát m-mel. Az $\overline{AB} = 41\,cm$ a háromszög leghosszabb oldala, mert az $\overline{AB}$ oldalon az egyik csúcsnál lévő szög 45°, akkor a másik csúcsnál lévő szög kisebb 45°-

nál, ezért a C csúcsnál lévő szög nagyobb, mint 90°. A magasság T talppontja az $\overline{AB}$ belső pontja. A magasság az ABC háromszöget két derékszögű háromszögre bontja. **1p**



1p

Alkalmazzuk Pitagorasz- tételét.

$m^2 + 20^2 = b^2$

$m^2 + 21^2 = a^2$ **1p**

Az A csúcsnál lévő szög nagyobb, mint a B csúcsnál lévő szög, mert az $\overline{AC}$ merőleges vetülete kisebb, mint a $\overline{CB}$ merőleges vetülete. Az A csúcsnál lévő szög lehet csak 45°-os.

1p

Az ATC derékszögű háromszög egyenlő szárú. Ezért $\overline{AT} = m \quad \Rightarrow \quad m = 20cm.$ **1p**

Behelyettesítve $m^2 + 21^2 = a^2$ egyenletbe $20^2 + 21^2 = a^2$ **1p**

$841 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{841}cm = 29cm$ **1p**

Behelyettesítve $m^2 + 20^2 = b^2$ egyenletbe $20^2 + 20^2 = b^2$ **1p**

$800 = b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 20 \cdot \sqrt{2}\ cm \approx 28,28\ cm$ **1p**

Tehát a háromszög oldalai: a= 29 cm, b= $20 \cdot \sqrt{2}$ cm, c=41 cm, **1p**

4. feladat:

Egy négytagú családban most két szülő életkorának összege négyszerese a két gyerek életkora összegének. Három évvel ezelőtt a két szülő életkorának összege hatszorosa volt a két gyerek életkora összegének. Hány év most a négy családtag életkorának összege? **10p**

Megoldás:

Jelöljük a szülők jelenlegi életkorának összegét x-szel, a gyerekek jelenlegi életkorának összegét y-nal. A feladat szerint $x = 4 \cdot y$ **1p**

Három évvel ezelőtt a szülők életkorának összege x-6.
A gyerekek életkorának összege y-6. **1p**

A feladat szerint $x - 6 = 6 \cdot (y - 6)$ **1p**

$4 \cdot y - 6 = 6 \cdot (y - 6)$ **1p**

$4 \cdot y - 6 = 6 \cdot y - 36$ **1p**

$30 = 2 \cdot y$ **1p**

$y = 15 \quad \Rightarrow \quad x = 60$ **2p**

Tehát a szülők életkorának összege 60, a gyerekek életkorának összege 15. **1p**
A négy családtag életkorának összege 75. **1p**

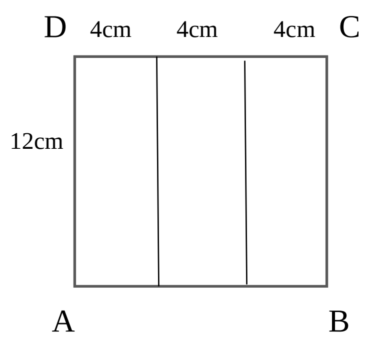
5. feladat:

Egy 12 cm oldalhosszúságú négyzetet úgy osztottunk fel három egyenlő kerületű téglalapra, hogy a téglalapok kerülete a lehető legkisebb lett. Hány cm egy ilyen téglalap kerülete? **12p**

Megoldás:

A négyzetet kétféleképpen lehet felosztani három egyenlő kerületű téglalapra: **1p**

Egyik eset:

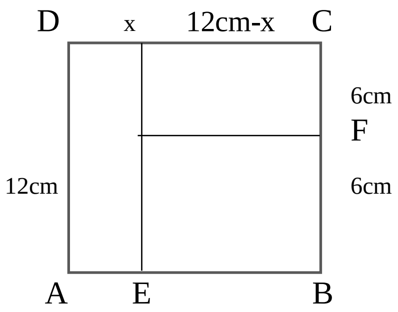


1p

Ha a négyzetet az egyik oldalával párhuzamos két szakasszal osztottuk három részre, akkor a keletkezett három téglalap egyik oldala 4 cm (12: 3=4), a másik 12 cm. **1p**

A téglalap kerülete $(12cm+4cm)\cdot 2=32cm$ **1p**

Második eset:



F csak felezőpont lehet. **2p**

Az így kapott téglalapok kerülete megegyezik, ezért $(12+x)\cdot 2=(6+12-x)\cdot 2$ **2p**

$$(12+x)\cdot 2=(6+12-x)\cdot 2$$
$$12+x=18-x$$ **2p**
$$x=3$$

A téglalap kerülete $k=(12cm+3cm)\cdot 2=30cm$ **1p**

A két kerület közül a 30 cm a legkisebb. **1p**