XI. Apáczai Matematika Kupa
TEHETSÉGKUTATÁS HATÁROK NÉLKÜL

2015. december 4
8. osztály

Pontozási útmutató

1. A 24 fős nyolcadik osztályban az a szokás, hogy félévkor minden fiú ad magáról egy fényképet minden lánynak. Év végén ugyanígy tesznek a lányok is, ők is adnak magukról minden fiúnak fényképet. Összesen hány fénykép cserél gazdát, ha az osztályban kettővel kevesebb fiú van, mint lány? **6p**

Megoldás: A 24 fős osztályban kettővel kevesebb a fiú, mint a lány, tehát 11 fiú és 13 lány jár oda. **1p**

A 11 fiú 13 lánynak ad fényképet, ami $11\cdot 13=143$ db fénykép félévkor. **2p**

A 13 lány 11 fiúnak ad fényképet, ami $13\cdot 11=143$ db fénykép év végén. **2p**

Összesen $143\cdot 2=286$ db fénykép cserél gazdát egy év alatt. **1p**

2. Melyek azok a P(x;y) pontjai a síknak, amelyeknek koordinátái egész számok és koordinátái kielégítik a következő egyenletet: $(2y+x)\cdot(2y+1)=6$ **8p**

Megoldás:

Bontsuk fel a 6-ot egész számok szorzatára:

$6=1\cdot 6=(-1)\cdot(-6)=2\cdot 3=(-2)\cdot(-3)$ **1p**

$2y+1\neq 2$, $2y+1\neq -2$, $2y+1\neq 6$, $2y+1\neq -6$, mert y-ra nem kapunk egész számot. **2p**

Ha 2y+1=1 , akkor y=0 , $\Rightarrow$ 2y+x=6, azaz x=6 **1p**

Ha 2y+1=-1, akkor y=-1 , $\Rightarrow$ 2y+x=-6, azaz x=-4 **1p**

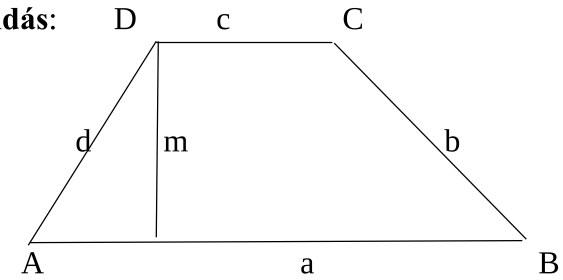
Ha 2y+1=3, akkor y=1, $\Rightarrow$ 2y+x=2, azaz x=0 **1p**

Ha 2y+1=-3, akkor y=-2, $\Rightarrow$ 2y+x=-2, azaz x=2 **1p**

A pontok koordinátái $P_1(0;1)$ $P_2(2;-2)$ $P_3(6;0)$ $P_4(-4;-1)$ **1p**

3. Egy nem derékszögű trapéz kisebb alapjának, magasságának és nagyobb alapjának hossza cm-ben mérve ebben a sorrendben három egymást követő egész szám. Területe 120 cm^2 és 130 cm^2 közé esik. Mekkora a legkisebb oldal? **9p**

Megoldás:



1p

A feltétel szerint a=m+1, c=m-1 **2p**

A trapéz területe: $T=\frac{a+c}{2}\cdot m=\frac{m+1+m-1}{2}\cdot m=m^2$ **2p**

Keressük azt a négyzetszámot, amely 120 és 130 közé esik. Csak egyetlen ilyen szám létezik, ez a 121 . Így m=11 cm $\Rightarrow$ a=12 cm és c=10 cm. **2p**

A b és a d oldal egy-egy derékszögű háromszög átfogója, ezek hossza nagyobb, mint az m hossza. Tehát a legkisebb oldal hossza c=10 cm. **2p**

4.Az $\overline{abcda}$ ötjegyű szám számjegyei prímek, számjegyeinek összege prím, az $\overline{ab}$ kétjegyű és az $\overline{acd}$ háromjegyű szám is prím. Mi ez az ötjegyű szám? Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző prímeket jelölnek. **9p**

Megoldás:

Az a, b, c, d csak a 2, 3, 5 vagy a 7 lehet. **1p**

Ha a páratlan, akkor az a+b+c+d+a páros szám, tehát nem prím. **1p**

Az a=2 lehet csak. **1p**

$\overline{ab}$ is prím, ezért b=3 lehet csak. (a 23 prím). **1p**

A többi nem prím. Az $\overline{acd}$ prím feltételből c=5 és ebből d=7 következett. **2p**

Tehát a=2, b=3, c=5, d=7 . 2+3+5+7+2=19 prím, 23 prím, 257 prím. **2p**

Az ötjegyű szám 23572. **1p**

5.Kata és Tamás dobókockával játszik, a következő szabályok szerint: feldobnak egy-egy dobókockát, és a dobott számokat összeszorozzák. Kata nyer, ha a számok szorzata legfeljebb 6, vagy legalább 24, különben Tamás nyer. Kinek kedvezőbb a játék? Indokolj!

9p

Megoldás:

Összesen $6 \cdot 6 = 36$ dobáspár lehetséges. **1p**

Ha a szorzat legfeljebb 6, akkor a lehetőségek:

Kata dobása	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
Tamás dobása	1	2	3	4	5	6	1	2	3	1	2	1	1	1

3p

Ha a szorzat legalább 24, akkor a lehetőségek:

Kata dobása	4	5	5	6	6	6
Tamás dobása	6	5	6	4	5	6

2p

Kata 20 dobáspár esetén nyerhet. **1p**

Tamás 16 dobáspár esetén nyerhet. **1p**

Katának kedvezőbb a játék. **1p**

6.András és Béla pénzben játszanak egy társaságban. András elveszítette pénzének p %-át, Béla viszont p % - kal növelte pénzét. Így kettejük összes pénze $\frac{p}{8}$ %-kal növekedett. Mennyi volt eredetileg András és Béla pénzének aránya?

9p

Megoldás:

Legyen Andrásnak eredetileg x forintja, Bélának y forintja. **1p**

A játék után Andrásnak $x - \frac{p}{100} \cdot x$ Bélának $y + \frac{p}{100} \cdot y$, **1p**

összesen $x + y + \frac{p}{8} \cdot \frac{1}{100} \cdot (x + y)$ forintjuk lett. **1p**

$$x-\frac{p}{100}\cdot x+y+\frac{p}{100}\cdot y=x+y+\frac{p}{800}\cdot\left(x+y\right)$$ **1p**

$$-\frac{p}{100}\cdot x+\frac{p}{100}\cdot y=\frac{p}{800}\cdot x+\frac{p}{800}\cdot y$$ **1p**

$$-8px+8py=px+py$$ **1p**

$$-8x+8y=x+y$$

$$7y=9x$$ **1p**

$$\frac{x}{y}=\frac{7}{9}$$ **1p**

Tehát András és Béla pénzének aránya $\frac{7}{9}$ **1p**