XI. Apáczai Matematika Kupa
TEHETSÉGKUTATÁS HATÁROK NÉLKÜL

2015. december 4
7. osztály

Pontozási útmutató

1. Az Apáczai Nevelési Központ egyik osztályának matematikából legjobb tanulói Piri, Béla, Karcsi, Ildi. Pirinek kétszer annyi ötöse van, mint Bélának. Karcsinak eggyel kevesebb ötöse van, mint Bélának, de néggyel több, mint Ildinek. Pirinek összesen annyi ötöse van, mint a másik háromnak összesen. Hány ötöse van a négy gyereknek külön-külön? **6p**

Megoldás:

Béla jegyeinek száma legyen x, akkor Pirinek 2x, Karcsinak x-1, Ildinek x-5 **2p**

$$x+(x-1)+(x-5)=2x$$ **1p**

$$3x-6=2x$$

$$x=6$$ **2p**

Tehát Pirinek 12, Bélának 6, Karcsinak 5, Ildinek 1 ötöse van. **1p**

2.Matyi 2001. január elsején született. Ezt a dátumot sokszor így szokták leírni:

év	hó	nap
01	01	01

Ehhez a lejegyzéshez 3 db 0 és 3 db 1 számjegyre van szükség. Írd fel azokat az 1992 és 2002 közötti 10 évben előforduló dátumokat, amelyek ilyenfajta lejegyzéséhez ugyancsak 3 db 0-ra és 3 db 1-re van szükség! **8p**

Megoldás:

A 3 db 0 és 3 db 1 számjegy csak a 2000. és a 2001. évben fordulhat elő. **1p**

A dátumokban se a hónapoknál, se a napoknál sem lehet 00. **1p**

A 2000-es évben 2001-es évben **1p**

év	hó	nap
00	01	11
00	10	11
00	11	01
00	11	10

év	hó	nap
01	01	01
01	01	10
01	10	01
01	10	10

2p+2p

Összesen 8 db különböző dátum létezik. **1p**

3.Négy kártya mindegyikére egy-egy számot írtunk, a lapok másik oldalára pedig egy-egy állítást. A számok: **2, 5, 7** és **12**. Az állítások**: „Prím.”, „Páratlan”**, „**Osztható 7-tel”** és **„Nagyobb, mint 100”**. Úgy írtuk fel, hogy egyik számára sem teljesül az az állítás, ami a számot tartalmazó kártyalap hátoldalán található. Melyik szám van azon a kártyalapon, amelynek hátoldalán a **„Nagyobb, mint 100."** állítás olvasható?

8p

Megoldás:

A „**Prím”** felírat csak a 12 hátoldalára kerülhet, mert a másik három szám prím. **2p**

A „**Páratlan”** felírat csak páros szám hátoldalára kerülhet, de a 12 már foglalt, így ez csak a 2 hátoldalára kerülhet. **2p**

Maradt még az 5 és a 7. Ezek közül csak az 5 hátoldalára kerülhet az „**Osztható 7”**-tel felírat. **2p**

A „**Nagyobb mint 100”** felíratnak a 7 maradt meg. **2p**

4.Egy téglatest egy csúcsba futó élei 5 cm, 8 cm, és 10 cm hosszúak. A leghosszabb éllel párhuzamosan egy négyzet keresztmetszetű furatot vágnak bele. (A furat leghosszabb éle párhuzamos a téglatest leghosszabb élével). Az így kapott lyukas test térfogata $\frac{9}{10}$ -ed része az eredeti téglatest térfogatának. Hány százalékkal változott a felszín?

9p

Megoldás:

A téglatest térfogata $V = 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400 (cm^3)$ **1p**

A furatelkészítése után a térfogat $V = 400 \cdot \frac{9}{10} = 360 \left(cm^3\right)$ **1p**

A négyzet keresztmetszetű furat térfogata 40 cm^3. **1p**

Tehát $40 = x^2 \cdot 10$ **1p**

$x^2 = 4$

x=2 (cm) (a negatív gyök nem megoldás) **1p**

Az eredeti felszín :

$$A=5\cdot 8\cdot 2+8\cdot 10\cdot 2+5\cdot 10\cdot 2=80\left(cm^2\right)+160\left(cm^2\right)+100\left(cm^2\right)=340\left(cm^2\right)$$ **1p**

Az új felszín: $A' = 340\,cm^2 - 8\,cm^2 + 80\,cm^2 = 412\,cm^2$ **1p**

A felszín nőtt $72cm^2$-rel, **1p**

azaz $\frac{72}{340}\cdot 100 = 21{,}17\% \approx 21\%$ -kal. **1p**

5.Melyik az a legnagyobb egész szám, amelyben nincs két egyforma számjegy, és a számjegyek szorzata 216?

9p

Megoldás:

Bontsuk fel prímtényezőire a 216-ot! $216 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ **2p**

A $2\cdot 2\cdot 3$ nem lehet számjegy. **1p**

Csak a $2\cdot 2$ és a $3\cdot 3$ illetve $2\cdot 3$ szorzat lehet számjegy. **2p**

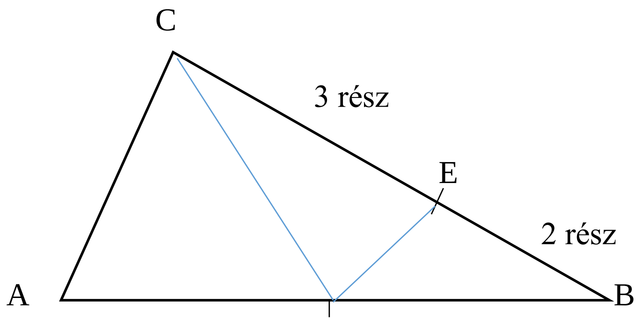
A legnagyobb számjegy ezek közül a $3\cdot 3$ **1p**

Tehát a számjegyek: 9, 6, 4, 1, illetve 9, 4, 3, 2, 1 **2p**

A legnagyobb szám a 94321 **1p**

6.Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja a D pont, a BC oldal E pontjára pedig tejesül, hogy $\frac{CE}{EB} = \frac{3}{2}$. Hányad része a DBE háromszög területe az ABC háromszög területének? Hányad része a DEC háromszög területe az ABC háromszög területének? **10p**

Megoldás:



D **2p**

D felezőpont, ezért a CD szakasz felezi az ABC háromszög területét.

Tehát $t_{DBC} = \frac{t_{ABC}}{2}$ **1p**

$\overline{CE} = \frac{3}{5} \cdot a \quad \overline{BE} = \frac{2}{5} \cdot a$ **1p**

A CDE háromszögnek és a DBE háromszögnek $\overline{CE}$ illetve a $\overline{BE}$ szakaszhoz tartozó magassága megegyezik. Jelöljük m-mel. **1p**

$$t_{DEC} = \frac{\frac{3}{5} \cdot a \cdot m}{2} = \frac{3}{10} \cdot a \cdot m$$ **1p**

$$t_{DBE} = \frac{\frac{2}{5} \cdot a \cdot m}{2} = \frac{2}{10} \cdot a \cdot m$$ **1p**

$$t_{DBE} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a \cdot m}{2} = \frac{2}{5} \cdot t_{DBC} = \frac{1}{5} \cdot t_{ABC}$$ **1p**

$$t_{DEC} = \frac{3}{5} \cdot t_{DBC} = \frac{3}{10} \cdot t_{ABC}$$ **1p**

A területek aránya 1:5 illetve 3:10 **1p**