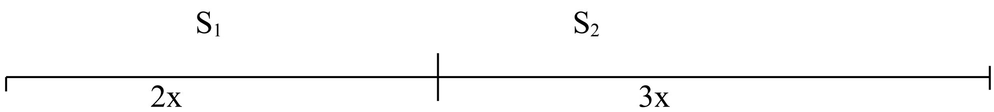
8. osztály versenyfeladatai és megoldások

1. Az egyik általános iskola 8. osztálya nagyobb kerékpártúrára indult. Egy idő múlva az osztály megtett útja úgy aránylik a hátralevő úthoz, mint 2:3. Ezután az osztály tagjai további 60 km-es utat tettek meg, s ekkor az összes megtett út úgy aránylik a hátralevő úthoz, mint 6:5. Mekkora utat tett meg az osztály a túrán, amíg a kiindulási pontjától elért a túra végpontjáig? 8p

Megoldás:



2x+60 3x-60 2p

$$\frac{2x+60}{3x-60}=\frac{6}{5}$$ 2p

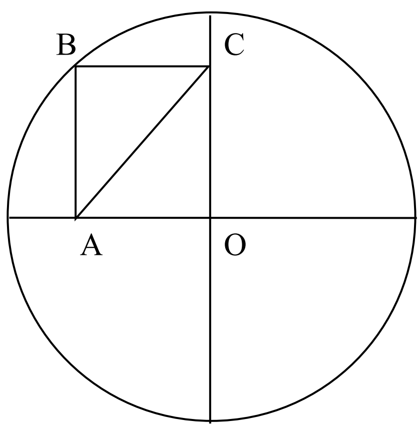
10x+300=18x-360

660=8x 2p

82,5=x 1p

Tehát a kerékpártúra $82,5\cdot 5=412,5$ (km) hosszú. 1p

2. A 2 cm sugarú, O középpontú körben AB, illetve BC párhuzamos a megrajzolt és egymásra merőleges sugarakkal. Ha OC=1,8 cm, mekkora AC hossza, és mekkora az AO hossza?



8p

Megoldás:
Az $AOCB$ négyszög téglalap a feltételek miatt. A téglalap átlói egyenlő hosszúak, ezért OB = AC. 1p
Az OB szakasz viszont a kör sugara, tehát hossza 2 cm. Az AC = 2 cm. 2p
Az AO hosszát Pitagorasz- tétel segítségével határozzuk meg, hiszen a háromszög derékszögű.

$$(AO)^2 + 1{,}8^2 = (AC)^2$$ 2p

$$(AO)^2 = 4 - 3{,}24$$

$$(AO)^2 = 0{,}76$$ 2p

$$AO = \sqrt{0{,}76(cm)} = 0{,}8717(cm)$$ 1p

3. Határozd meg azokat az $\overline{abab}$ alakú, négyjegyű természetes számokat, amelyek oszthatók 15-tel!

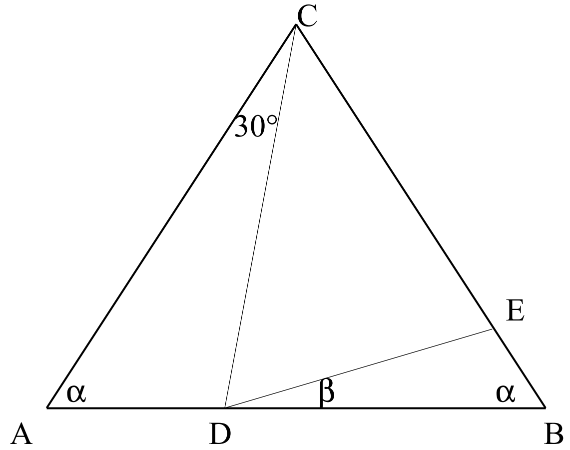
8p

Megoldás:
Ha az $\overline{abab}$ alakú szám osztható 15-tel, akkor természetesen 3-mal és 5-tel is osztható. Másrészt, ha $\overline{abab}$ osztható 3-mal és 5-tel, akkor osztható 15-tel is, mert a 3 és az 5 relatív prímek! 2p
Ha a szám osztható 5-tel, akkor b = 0 vagy 5. Ennek alapján két esetet különböztetünk meg.
I. b=0: Ekkor a szám $a0a0$ alakú. Valamely egész szám pontosan akkor osztható hárommal, ha jegyeinek összege osztható hárommal. Így $a0a0$ pontosan akkor osztható 3-mal, ha $2a$, tehát, ha a osztható 3-mal. Itt három megoldás adódik: 3030; 6060; 9090. 3p
II. b=5: Ekkor a szám $a5a5$ alakú. Most a 3-mal osztva 1 maradékot kell, hogy adjon. Tehát itt is 3 megoldás adódik: 1515; 4545; 7575. 2p
Összesen hat megoldás van. 1p

4. Az egyenlőszárú ABC háromszög AB alapján felvettünk egy D belső pontot úgy, hogy ACD szög 30°-os legyen. A CD sugarú C középpontú körvonal a BC szárat az E pontban metszi.
Mekkora a BDE szög?

8p

Megoldás:



Legyen a CAB szög = α és EDB szög = β.

DCE szög = $180° - (2\alpha + 30°) = 150° - 2\alpha$. 1p

Mivel DC = EC, ezért

DEC szög = $\dfrac{180° - (150° - 2\alpha)}{2} = \dfrac{30° + 2\alpha}{2} = 15° + \alpha$ 2p

AC = BC miatt DBE szög = α és a

DBE háromszögnek DEC szög külső szöge, 1p

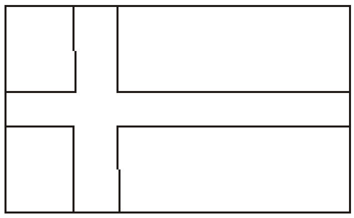
ezért

$$\alpha + \beta = 15° + \alpha$$ 2p

azaz $\beta = 15°$

A keresett BDE szög = 15°-os. 2p

5. A finnek nemzeti zászlója: fehér téglalap alapon fekvő kék kereszt, melynek mindkét szára egyforma széles (lásd az ábrát!). A kék kereszt hosszabbik sávjának a területe 8800 cm^2, a rövidebbik sáv területe pedig 5400 cm^2. Mekkora a zászló területe, ha a kék kereszt 12600 cm^2 területű?



9p

Megoldás:

Először kiszámolom annak a résznek a területét, ahol a két csík összeér.
Ha a két csík területét összeadom, akkor pontosan ezzel a területtel kapok többet a kék kereszt területénél. Tehát a közös rész területe: 8800+5400 -12600=1600 cm^2. 3p

Ez a rész egy négyzet, amelynek oldala $\sqrt{1600}$ cm, azaz 40 cm. 2p.

A két sáv egy-egy oldala 40 cm hosszú, tehát a másik oldal 8800cm:40=220 cm-es, illetve 5400cm:40=135 cm-es. 2p

A zászló területe $220 \cdot 135 cm^2 = 29700\ cm^2$. 2p

6. Egy sportversenyen15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött. A győzelemért 3, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pontot kapott egy-egy csapat. A verseny végén minden csapatnak más-más pontszáma volt, az utolsó 21 pontot szerzett. Hány pontja volt a győztes csapatnak?

9p

Megoldás:

A verseny során a csapatok összesen $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ mérkőzést játszottak. 2p

Mivel minden mérkőzésen 4 pont talál gazdára, ezért a verseny végére összesen $4 \cdot 105 = 420$ pontot osztottak ki. 2p

Az utolsó helyen végzett csapatnak 21 pontja volt, és minden csapatnak legalább eggyel több, mint a sorrendben utána állónak. A 15 csapatnak legalább 21+22+23+…+33+34+35 =420 pontot osztottak ki. A győztes csapat 35 pontos. 5p