VI. APÁCZAI matematika VERSENY

ANK TEHETSÉGPONT

a nyelvi előkészítő 9. évfolyamos tanulók részére 2011

Pontozási útmutató

1. Feladat: Egy boltban vásároltunk 10 db ceruzát és 6 db tollat, azonban a pénztárnál véletlenül felcserélték az árcédulákat, így 6 db ceruza és 10 db toll árát fizettük ki. Eredetileg 600 forintot kellett volna fizetnünk, de így 680 forintot kértek tőlünk. Mennyibe került egy toll, és mennyibe került egy ceruza?

6p

Megoldás I.: Négy ceruza helyett négy tollat fizettünk, tehát a toll drágább, mint a ceruza. **1p**

Egy toll $\frac{80}{4} = 20\,(\text{Ft})$-tal kerül többe. **1p**

10 ceruza és 6 toll ára 600 forint, azaz 16 ceruza ára és $6 \cdot 20 = 120$ forint megegyezik 600 forinttal. 16 ceruza ekkor 480 forint. **2p**

Tehát egy ceruza 30 forint és egy toll 50 forint. **2p**

Megoldás II.: Egy ceruza árát jelöljük x-szel, egy toll árát jelöljük y-nal.

A szöveg alapján a következő összefüggéseteket írhatjuk $10 \cdot x + 6 \cdot y = 600$

$6 \cdot x + 10 \cdot y = 680$ **2p**

A két egyenletet összeadva $16 \cdot x + 16 \cdot y = 1280$

Mindkét oldalt 16-tal osztva kapjuk, hogy $x + y = 80$

Kifejezve y-t $y = 80 - x$ **1p**

Behelyettesítve $10 \cdot x + 6(80 - x) = 600$

$10 \cdot x + 480 - 6 \cdot x = 600$

$4 \cdot x = 120$ **1p**

$x = 30$ és $y = 50$ **1p**

Tehát egy ceruza 30 forintba és egy toll 50 forintba kerül. **1p**

2. Feladat: Huszonhét darab szabályos dobókockából egy nagyobb kockát rakunk össze. A kocka felszínén lévő pöttyök számának összegét határozzuk meg. Mekkora lehet az összeg legkisebb és legnagyobb értéke?

(A kocka szemközti lapjain lévő pöttyök számának összege mindig 7.) **8p**

Megoldás: A nagy kockán háromféleképpen helyezkedhetnek el a kisebb kockák. A sarokban, azaz a nagy kocka csúcsainál –ekkor a kis kocka három, egy csúcsban találkozó oldala látszik, élközépen –ekkor a kis kocka két szomszédos lapja látszik, lapközépen –ekkor a kis kockáknak egy lapja látszik. **2p**

A sarokkockákon a látható pöttyök lehető legkisebb összege 1+2+3=6 , az élközép-kockákon 1+2=3, a lapközép-kockákon 1. **2p**

Sarokkockából 8 van, élközépkockából 12, lapközépkockából 6, tehát az elérhető legkisebb összeg $8\cdot(1+2+3)+12\cdot(1+2)+6\cdot1=90$. **2p**

Az elérhető legnagyobb összeg ennek alapján $8\cdot(6+5+4)+12\cdot(6+5)+6\cdot6=288$, **2p**

3. Feladat: A csempéző 2011-ben csempét rendelt egy négyzet alakú terem padlózatának burkolásához. Szórakozottságában a fal hosszúságában szükséges csempék száma helyett a saját életkorát írta fel. Így a megrendelés alapján a szükségesnél 1111-gyel több csempét szállítottak neki. Mikor született a csempéző? **11p**

Megoldás: Jelöljük x-szel a csempéző életkorát és y-nal a fal hosszúságában szükséges csempék számát. **1p**

Így $x^2-y^2=1111$ **1p**

Átalakítva $(x+y)\cdot(x-y)=1111$ **1p**

$(x+y)\cdot(x-y)=11\cdot101$ (A 101 és a 11 is prím) **1p**

$x+y=1111$ és $x-y=1$ vagy **1p**

$x+y=101$ és $x-y=11$ **1p**

Az első esetben x=556 adódna, ami a feladat szövegének ellent mond.

A második esetben a megoldás **1p**

$x+y=101$

$x-y=11$ **1p**

$x+y=101$

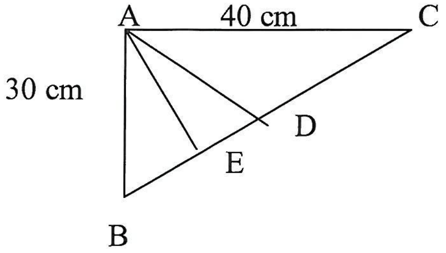
$2\cdot x=112$ $\Leftrightarrow$ x=56 és y=45

2p

A csempéző tehát 56 éves és 1955- ben született. **1p**

4. Feladat: Az ABC derékszögű háromszögben a derékszög csúcsát jelöljük A-val. Tudjuk, hogy az $\overline{AB}=30\,\text{cm}$ és $\overline{AC}=40$ cm. Legyenek D és E a $\overline{BC}$ átfogó pontjai úgy, hogy $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ és $\overline{BD}=\overline{DC}$. Számítsuk ki az ADE háromszög területét! **12p**

Megoldás:



Helyes ábra **1p**

Pitagorasz tétele alapján kiszámíthatjuk, hogy az átfogó 50 cm hosszú. **1p**

Thalész-tétel megfordítása alapján a háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja, tehát a D felezőpont a köré írt kör középpontja, ezért $\overline{AD}$ megegyezik a sugárral, azaz 25 cm. **1p**

$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ **2p**

Innen $\overline{AE} = \frac{30 \cdot 40}{50} \text{cm} = 24\,\text{cm}$ **2p**

Mivel $\overline{ED} = \overline{BD} - \overline{BE}$ **1p**

és $\overline{BE} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{324} = 18(\text{cm})$ **2p**

$T_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{ED} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (25-18) = 84(\text{cm}^2)$ **2p**

5. Feladat: Határozzuk meg a következő halmaz elemeit: $A = \{\overline{nabc} \in N \mid \overline{abc} = n \cdot \overline{bc}\}$!

Az $\overline{nabc}$ azt a négyjegyű számot jelöli, ahol az első számjegy **n** második **a**, a harmadik **b** és a negyedik **c**

13p

Megoldás:

A feltételekből következik, hogy a, b, n $\neq 0$

$\overline{abc} = n \cdot \overline{bc} \Leftrightarrow 100 \cdot a + \overline{bc} = n \cdot \overline{bc} \Leftrightarrow (n-1)\overline{bc} = 100 \cdot a$ **1p**

Ha a=1, akkor $100 = 4 \cdot 25 = 2 \cdot 50 = 5 \cdot 20$, tehát $\overline{nabc} \in \{3150, \quad 5125, \quad 6120\}$ **2p**

Ha a=2, akkor $200 = 8 \cdot 25 = 4 \cdot 50 = 5 \cdot 40$, tehát $\overline{nabc} \in \{5250, \quad 6240, \quad 9225\}$ **2p**

Ha a=3, akkor $300 = 4 \cdot 75 = 5 \cdot 60 = 6 \cdot 50$, tehát $\overline{nabc} \in \{5375, \quad 6360, \quad 7350\}$ **2p**

Ha a=4, akkor $400 = 5 \cdot 80 = 8 \cdot 50$, tehát $\overline{nabc} \in \{6480, \quad 9450\}$ **2p**

Ha a=5, akkor $500 = 5 \cdot 4 \cdot 25 = 5 \cdot 2 \cdot 50 = 5 \cdot 5 \cdot 20$, nincs megoldás **2p**

Ha a=6, akkor $600 = 8 \cdot 75$, tehát $\overline{nabc} \in \{9675\}$. **1p**

Az a más értéket nem vehet fel. Tehát a halmaznak 12 eleme van. **1p**