

II. forduló (a döntő) feladatai és megoldásai  
2011

**1. Feladat:** Egy 21 literes tartályban 18 %-os alkohol van. Hány litert kell kicserélni 90 %-os alkohorra, hogy a tartály 42 %-os alkohollal legyen tele? **8p**

**Megoldás:**

A szükséges töményebb alkohol mennyiségét jelöljük  $x$ -szel. A szöveg alapján  $x$  mennyiséget kiöntünk a 21 literből, marad  $21-x$  liter 18%-os alkohol. **1p**

Hozzáöntünk  $x$  liter 90 %-os alkoholt.

$$\text{Tehát } (21-x) \cdot 0,18 + x \cdot 0,9 = 21 \cdot 0,42 \quad \mathbf{2p}$$

$$21 \cdot 0,18 - x \cdot 0,18 + x \cdot 0,9 = 8,82 \quad \mathbf{2p}$$

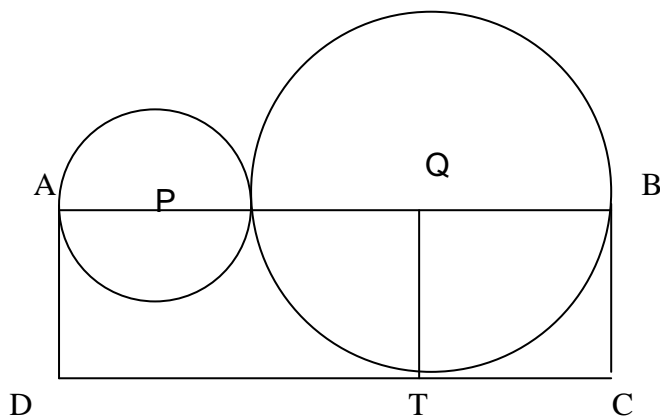
$$3,78 + 0,72 \cdot x = 8,82$$

$$0,72 \cdot x = 5,04$$

$$x = 7 \quad \mathbf{2p}$$

Tehát 7 liter oldatot kell töményebbre cserélni. **1p**

**2. Feladat:** Az ábrán látható P és Q középpontú körök érintik egymást. A PQ egyenes a köröket A-ban, illetve B-ben metszi. A CD egyenes a nagyobbik kört T-ben érinti és párhuzamos az AB-vel. Hány  $\text{cm}^2$  a PQT háromszög területe, ha az ABCD téglalapé  $15 \text{ cm}^2$ ? **9p**



**Megoldás:**

A PQ szakasz hossza a két kör sugarának az összege, azaz  $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ . **2p**

A  $\overline{QT}$  a nagyobb kör sugara, egyben a téglalap  $\overline{AD}$  és  $\overline{BC}$  oldalával is egyenlő. **2p**

A PQT derékszögű háromszög. **2p**

$$\text{Területe: } T = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{QT}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{T_{\text{téglalap}}}{4} \quad \mathbf{2p}$$

A háromszög területe  $\frac{15}{4} \text{ cm}^2$  **1p**

# VI. A P Á C Z A I M A T E M A T I K A V E R S E N Y



ANK TEHETSÉGPONT

**3. Feladat:** Egy szállodában a vendégek ebédre minden nap ugyanabból a háromféle előételből, ugyanabból a háromféle főételből és ugyanabból a háromféle desszertből választhatnak egyet-egyed. Egy négy fős család eltervezte, nyaralásuk minden napján mindegyikük olyan háromfogásos ebédet fog rendelni, amelyet addig a napig még a család egyik tagja sem választott, és a többiek aznapi rendeléseitől is különbözik. Az utolsó napon egyiküknek ez már nem sikerült. Hány napos volt a nyaralásuk? ( Két ebédet különbözőnek tekintünk, ha az előétel, a főétel és a desszert közül legalább az egyik különböző.) **10p**

**Megoldás:**

Az egyik előételhez 3 féle főétel választható. **2p**

Minden főételhez 3 féle desszert választható. **2p**

Ez  $3 \cdot 3 = 9$  lehetőséget jelent. **2p**

A 3 előételt figyelembe véve összesen  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  lehetőséget jelent. **1p**

Az utolsó napon a család egyik tagja már nem tudott az eredeti terv szerint ebédet rendelni, ezért 28 féle háromfogásos ebédre lett volna szükség. **1p**

A család 4 főből állt, így  $\frac{28}{4} = 7$  napos volt a nyaralásuk. **2p**

**4. Feladat:** Egy osztályban több mint 27 gyerek jár. Csütörtökön az első órában mindenkinek nyelvvórja van, angolt vagy németet tanulnak. Amikor az angolosok közül 12-en hiányoztak egy nyelvi verseny miatt, akkor a németesek több mint kétszer annyian voltak. Amikor viszont 10 németes nem volt ott, akkor az angolosok több mint kilencszer annyian voltak. Mennyi a két nyelvi csoport teljes létszáma? **10p**

**Megoldás:**

Az osztályban legyen **a** angolos és **n** németes. A feltételek miatt  $n > 2 \cdot (a - 12)$  és  $a > 9 \cdot (n - 10)$  **1p**

Átalakítva a második egyenlőtlenséget  $\frac{a}{9} + 10 > n$  alakot kapjuk. **2p**

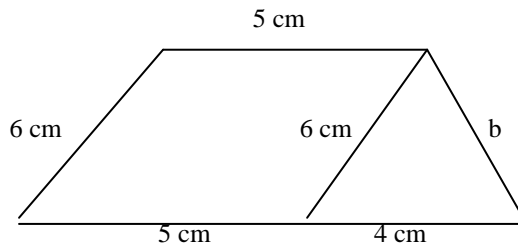
$\frac{a}{9} + 10 > 2 \cdot a - 24$  egyenlőtlenségből következik, hogy  $a < 18$ , **2p**

így  $n < \frac{a}{9} + 10 < \frac{18}{9} + 10 = 12$  **2p**

Ezek szerint **a** lehető legnagyobb értéke 17, míg **n**-é 11. Összegük 28. Mivel az osztály létszáma legalább 28, ezért az angolosok 17-en, a németesek 11-en vannak. **2p**

**5. Feladat:** Egy trapéz alapjai 5 cm és 9 cm hosszúak, az egyik szár hossza 6 cm. Hány különböző egész értéket vehet fel a trapéz másik szárának centiméterekben mért hossza? **11p**

**Megoldás:**



**1p**

Húzzunk párhuzamost a 6 cm-es szárral a trapéz 5 cm –es alapjának másik végpontjából. **1p**  
Ekkor egy olyan háromszöget kapunk, melynek egyik oldala 6 cm, a másik 4 cm, a harmadik oldala pedig b, ez a trapéz másik szára. **2p**

A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenséget alkalmazzuk

$$b < 6 + 4, \text{ amiből } b < 10, \quad \mathbf{1p}$$

$$6 < b + 4, \text{ amiből } 2 < b, \quad \mathbf{1p}$$

$$4 < 6 + b, \text{ amiből } -2 < b \quad \mathbf{1p}$$

Tehát  $2 < b < 10$  feltételt kapjuk. **2p**

A trapéz szára 3, 4, 5, 6, 7, 8 vagy 9 cm lehet, ezért 7 különböző értéket vehet fel. **2p**

**6. Feladat:** Az **A** és **B** helységek közötti távolság  $\frac{1}{4}$  részét egy kerékpáros 1 óra alatt tette

meg, a hátralévő utat pedig 4 óra alatt. Sebességének mérőszáma  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  –ban mindkét szakaszon egész szám, melynek legkisebb közös többszöröse 72. Mekkora az **AB** távolság?

**12p**

**Megoldás:**

Ha a kerékpáros az **A** és **B** helységek közötti távolság  $\frac{1}{4}$  részét 1 óra alatt tette meg, a

hátralévő utat pedig 4 óra alatt, akkor az út első illetve a második szakaszán lévő  $v_1$  és  $v_2$

sebességeinek aránya  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{3}$ . **2p**

Ez azt jelenti,  $v_1 = 4 \cdot k$  és  $v_2 = 3 \cdot k$ , ahol  $k$  pozitív egész számot jelöl. **2p**

Tudjuk, hogy  $[4k; 3k] = 72$  **1p**

A 72-őt felbontjuk prímtényezőire:  $72 = 2^3 \cdot 3^2$  **2p**

Ezek szerint  $k$  prímtényezői felbontásában szerepelnie kell a 2-nek és a 3-nak egyszer.

A  $k = 2 \cdot 3 = 6$  lehet csak. **1p**

Így  $v_1 = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$   $v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  **2p**

A keresett távolság  $1h \cdot 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 4h \cdot 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 96 \text{km}$ . **2p**