1. Két borkereskedő érkezett a középkori Pécs kapujába. Az egyiknél 64, a másiknál 20 akó bor volt. A pénzük azonban nem volt elegendő ahhoz, hogy az előírt vámot megfizessék. A hiányzó pénzt borral pótolták: az első 40 aranyforintot fizetett és még 5 akó bort adott, a második 2 akó bort adott, de visszakapott 40 aranyforintot. Hány aranyforint volt a vám egy akó borra? 9 pont

Megoldás:

Legyen 1 akó bor ára y forint és 1 akó bor vámja x forint. 1p

A szövegből:

$$64x = 5y + 40$$ 2p

$$20x = 2y - 40$$ 2p

Az első egyenletet 2-vel, a másodikat -5-tel szorozva:

$$\left.\begin{array}{r} 128x = 10y + 80 \\ -100x = -10y + 200 \end{array}\right\}$$ 2p

Ezeket összeadva: $28x = 280$

$$x = 10$$ 1p

Tehát 10 aranyforint volt a vám 1 akó borra. 1p

2. Egy dobozban sárga és kék kockák vannak. Ha a dobozban egy sárga kockával kevesebb lenne, akkor a kockák hatodrésze lenne kék. Ha viszont két kék kockát egy sárgára cserélnénk, akkor a kockák ötödrésze lenne kék. Hány kék kocka van a dobozban? 9pont

Megoldás:

Legyen a sárga kockák száma: s, a kékeké: k. 1p

A feltételek alapján:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{k}{s+k-1} = \dfrac{1}{6} \\[2ex] \dfrac{k-2}{s+k-1} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$$ 2p, 2p

$$\left.\begin{array}{r} 6k = s+k-1 \\ 5k-10 = s+k-1 \end{array}\right\}$$ 1p, 1p

$$6k = 5k - 10$$ 1p

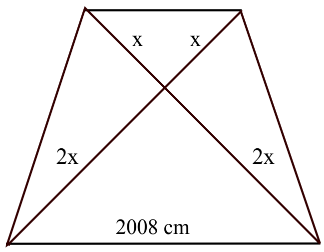
$$k = -10$$ 1p

A kockák száma nem lehet negatív, a feladatnak nincs megoldása. 1p

3. Egy szimmetrikus trapéz átlói merőlegesek egymásra, és 1:2 arányban osztják egymást. A trapéz hosszabb alapja 2008 cm. Számítsd ki a trapéz területét! 9 pont

Megoldás:

A trapézt két átlója 4 db derékszögű háromszögre osztja az ábra szerint.



1p

A trapéz területe a négy derékszögű háromszög területének összege:

$$T = \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{2x \cdot x}{2} + \frac{2x \cdot 2x}{2}$$ 2p

$$T = \frac{x^2}{2} + 2x^2 + 2x^2$$

$$T = \frac{9}{2}x^2$$ 1p

Az ábráról a Pitagorasz-tétel alapján:

$$4x^2 + 4x^2 = 2008^2$$ 2p

$$8x^2 = 2008^2$$

$$x^2 = \frac{2008^2}{8}$$ 1p

$$T = \frac{9}{2} \cdot \frac{2008^2}{8} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4032064}{8}$$

$$T = 2268036(cm^2)$$ 2p

4. Ha két természetes szám szorzatához hozzáadjuk az összegüket, 2008-at kapunk. Melyik ez a két szám? (Írd le a számítás menetét is!) 11 pont

Megoldás:

A számok: x; y $\in$ N

$$xy + x + y = 2008$$ 1p

$$x(y + 1) + y + 1 = 2009$$ 2p

$$(y + 1)(x + 1) = 2009$$ 2p

A 2009 a felbontása két tényező szorzatára az összes lehetséges módon (eltekintve a sorrendtől):

$$2009 = 1 \cdot 2009 = 7 \cdot 287 = 49 \cdot 41$$ 2p

Első eset:

$$y+1=1 \text{ és } x+1=2009$$

$$y_1=0 \text{ és } x_1=2008$$ 1p

Második eset:

$$y+1=7 \text{ és } x+1=287$$

$$y_2=6 \text{ és } x_2=286$$ 1p

Harmadik eset:

$$y+1=49 \text{ és } x+1=41$$

$$y_3=48 \text{ és } x_3=40$$ 1p

Mindhárom számpár megoldás. 1p

5. Autós Anti „kocsikázik”. Egy kilométerkőre rápillant, s lát rajta egy kétjegyű számot. Útját ugyanolyan átlagsebességgel folytatja. Egy órával később egy olyan kilométerkő mellett halad el, amelyen ugyanazokat a számjegyeket látja, csak fordított sorrendben. Továbbhajt, és egy órával később egy olyan kilométerkőhöz érkezik, amelyen ugyanaz a két számjegy ugyanolyan sorrendben van, mint az elsőn, de közöttük van egy 0. Mekkora volt Anti átlagsebessége? 11 pont

Megoldás:

A feltétel: x, y $\in Z^+ \mid 1 \le x; y \le 9$, mert számjegyek. 1p

1. kő: $10x+y$ 1p

2. kő: $10y+x$ 1p

3. kő: $100x+y$ 1p

Mivel minden leolvasás között 1 óra telik el, ezért a két szomszédos szám különbsége megadja az átlagsebességet. 1p

Ezért:

$$10y+x-10x-y=100x+y-10y-x$$ 1p

$$9y-9x=99x-9y$$

$$y-x=11x-y$$

$$2y=12x$$

$$y=6x$$ 2p

A feltétel miatt x = 1 és y = 6 lehet csak. 1p

A leolvasások: 16, 61 és 106, 1p

vagyis Anti átlagsebessége: 61 – 16 = 106 – 65 = 45 (km/h) 1p

6. Old meg a természetes számok halmazán az $a^2bc + ab^2c + abc^2 = 1463$ egyenletet! Add meg az összes lehetséges megoldást! 12 pont

Megoldás:

Kiemelve az egyenlet bal oldalán abc-t:

$$abc(a + b + c) = 1463$$ 1p

Az $1463 = 7 \cdot 11 \cdot 19$ 3p

A bal oldal négy pozitív egész szám szorzata, tehát a három ismeretlen közül az egyik csak 1 lehet. 1p

Legyen $c = 1$, ekkor 1p

$$ab(a + b + 1) = 1463$$ 1p

A prímtényezős felbontásból következik, hogy

a = 7 és b = 11 1p

vagy

a = 11 és b = 7 1p

A megoldások: 3p

a	1	1	7	7	11	11
b	7	11	1	11	1	7
c	11	7	11	1	7	1