Apáczai Matematikaverseny 2009
Döntő
Pontozási útmutató

1. Laci is és Sanyi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik autós magazint. Egyik fiúnak sincs elegendő pénze. Laci pénzéből hiányzik a magazin árának a 12%-a, Sanyi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározták, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.

a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a fiúknak külön-külön a vásárlás előtt?

b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Lacinak, illetve Sanyinak az osztozkodás után?

Megoldás:

Jelöljük x-szel a magazin árát. Lacinak 0,88x , Sanyinak $\frac{4}{5}x$ forintja van. 2p

a) $$0{,}88x + \frac{4}{5}x - x = 714$$

$x=1050$ 2p

Lacinak $0{,}88x=924$ forintja, Sanyinak $\frac{4}{5}x=840$ forintja van 2p

b) A maradékból Lacinak y, Sanyinak 714-y Ft jut. 1p

$$\frac{924}{840} = \frac{y}{714-y}$$

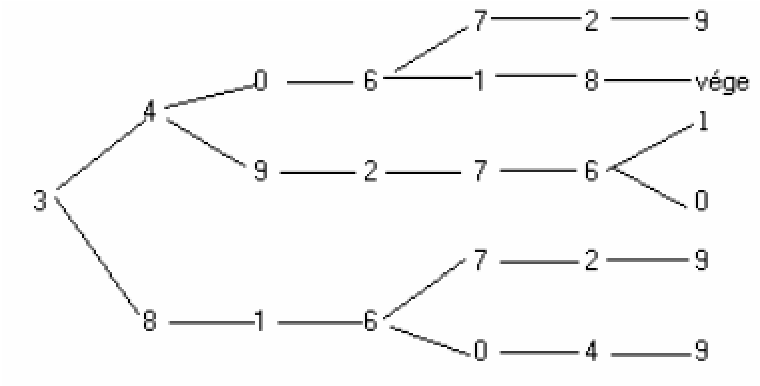
$y=374$ 2p

Lacinak 374 Ft-ja, Sanyinak 340 Ft-ja maradt a vásárlás után. 1p

2. Öt jó barát mindegyikének van mobiltelefonja. Észrevették, hogy mind az öt telefonszám olyan hétjegyű szám, amelynek első jegye 3-as és egyikük telefonszámában sincs két egyforma számjegy. Azt is megfigyelték, hogy amikor bármelyikük tárcsázza a másik számát, a lenyomott nyomógombok a sakkjátékban ismert lóugrással követik egymást. Adjuk meg az öt telefonszámot! Lehet-e ötnél több ilyen telefonszám?

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Megoldás:



6p

Tehát pontosan öt telefonszám tesz eleget a feltételeknek és ezek :

3 406 729
3 492 761
3 492 760
3 816 729
3 816 049

4p

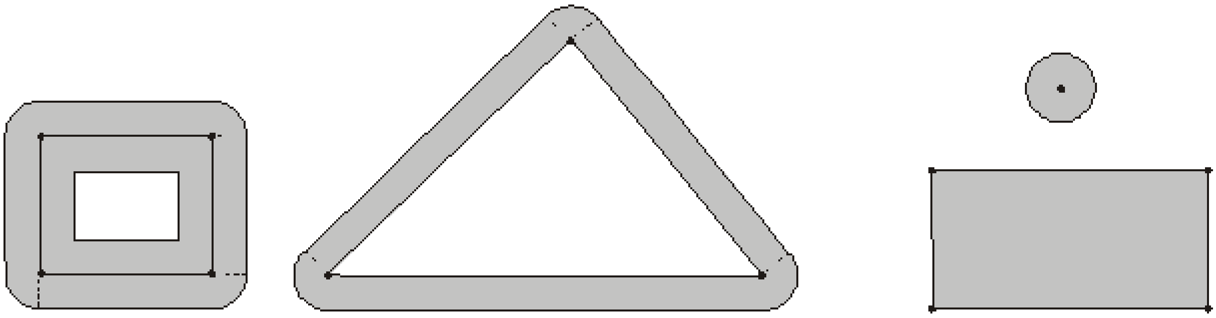
3. Az Abay, a Bakonyi és a Ceglédi család is tenyészt kecskét. A három család másképp legelteti a kecskéket. Az állatok nyakában található övre egy-egy 10 méter hosszú kötelet kötnek, de a kötél másik végén található gyűrűt különbözőképpen rögzítik.

Abayék a réten egy 40×50 méteres téglalap csúcsaiban kitűznek egy-egy póznát, a póznák között pedig - a téglalap oldalain - kifeszítenek egy-egy drótot. A gyűrűk a póznákhoz vannak rögzítve, illetve szabadon futhatnak a drótokon két pózna között. A kecskék a téglalapon kívül és belül is mozoghatnak.

Bakonyiék csak a zöldségeskerten kívül engedik legelni a kecskéket. A kert háromszög alakú, oldalai 90, 100, 130 méter hosszúak. A kerítés mentén végigfutó dróton szabadon mozoghatnak a gyűrűk.
Ceglédiék külön tartják a kecskebakot, melynek gyűrűje egy rögzített póznához van kötve. A pózna a kerítéstől 15m-re van. A többi kecskén még kötél sincs, azok bárhol legelhetnek egy 40m × 80m-

es téglalap alakú zárt telken belül.
Melyik család legelteti a legnagyobb területen a kecskéket?

Megoldás: Ábra 2p



Eredmény: a három terület egyenlő. 1p

Az egyes területek körcikk alakú részekből és téglalap alakú részekből állnak. Látni fogjuk, hogy

a) a körcikk alakú területek mindhárom esetben egy-egy 10m sugarú teljes kört adnak ki, 2p
b) a téglalap alakú részek összterülete mindhárom esetben 3200 m^2. 2p

Az a), b) állítások a harmadik esetben (Ceglédiék) automatikusan teljesülnek, az első esetben (Abayék) pedig egyszerű számolással és a négy negyedkör egymás mellé illesztésével igazolhatók. A második esetben (Bakonyiék) is csak az a) állítást indokoljuk alaposabban, sőt, azt kétféleképpen is.

I. indoklás
Ha a háromszög szögei α, β, γ, akkor a csúcsoknál létrejövő körcikkek középponti szögei rendre
$360^o - 90^o - \alpha - 90^o = 180^o - \alpha$,
$360^o - 90^o - \beta - 90^o = 180^o - \beta$,
$360^o - 90^o \gamma - 90^o = 180^o - \gamma$,
ezek összege pedig
$180^o - \alpha + 180^o - \beta + 180^o - \gamma = 540^o - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^o$,
hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$. 3p

II. indoklás
A körcikkek határolósugarai páronként párhuzamosak egymással, így a körcikkek az oldalak mentén egymáshoz tolhatók úgy, hogy együtt épp egy teljes kört adjanak ki.

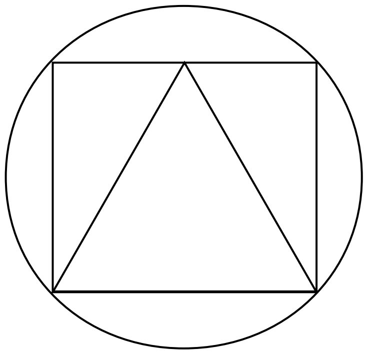
4. Az ***a*** és ***b*** pozitív egészek relatív prímek. Az ***A=8a+3b*** és a ***B = 3a+2b*** számok legnagyobb közös osztója viszont nem 1. Mennyi ***A*** és ***B*** legnagyobb közös osztója?

Megoldás:

Jelölje ***d*** az ***A*** és ***B*** legnagyobb közös osztóját **.** Ha ***d |A*** és ***d |B,*** akkor ***d | 8B-3A*** illetve ***d | 2A-3B*** . 3p
De ***8B-3A=7b, 2A-3B=7a*** Tudjuk,hogy ***a*** és ***b*** relatív prímek, ezért a **7b** és ***7a*** legnagyobb közös osztója csak a 7 lehet. 3p
Ezért ***d*** osztója a 7-nek. , azaz ***d***=1 vagy ***d***=7. Tudjuk, hogy ***A*** és ***B*** nem relatív prímek, 2p

A és ***B*** legnagyobb közös osztója csak a 7 lehet. 2p

5. Egy szabályos háromszög köré egy téglalapot rajzolunk, majd a téglalap köré egy kört. Mekkora a kör területe, ha a háromszög oldala 10cm?



Megoldás:

A téglalap oldalai 10cm és $\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm.

A kör átmérője a téglalap átlójával egyezik meg. 3p

Pitagorasz- tételt alkalmazva: $10^2 + \left(\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2r)^2$ 2p

$$100+25 \cdot 3 = 4r^2$$

$$175=4r^2$$

$$\frac{175}{4} = r^2$$ 2p

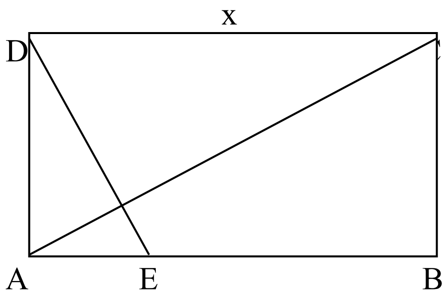
$$T = r^2 \cdot \pi = \frac{175}{4} \cdot \pi = 137{,}4\left(cm^2\right)$$ 2p

A kör területe 137,4 cm^2 1p

6. Az ABCD téglalap D csúcsán átmenő és az AC átlóra merőleges egyenes az AB szakaszt az E pontban metszi. Az AE szakasz hossza $\frac{9}{2}$ egység, a téglalap területe 48 területegység. Számítsuk ki a téglalap oldalainak hosszát!

Megoldás:

Legyen a téglalap AB oldala x , az AD oldala y. Az adatok alapján $x \cdot y = 48$. Az $ADE\angle = BAC\angle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Az ADE és BAC derékszögű háromszögek hasonlóak, megfelelő oldalaik aránya megegyezik: 2p 2p



$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{BC}, \text{ vagyis } \frac{y}{\frac{9}{2}} = \frac{x}{y},$$ 2p

átrendezve $y^2 = \frac{9}{2}x$ 1p

$y^2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{48}{y}$, egyenletet rendezve $y^3 = 9 \cdot 24 = 27 \cdot 8 = 3^3 \cdot 2^3$ Tehát y=6 és x=8 3p