Feladatok és megoldások nyelvi osztály versenyére
2010

II forduló

1. feladat:
Egy szálloda kihasználtsága átlagosan 88%-os a három nyári hónap alatt, és 44%-os az év többi időszakában. Hány százalékos a szálloda kihasználtsága az egész évre számítva átlagosan? **10p**

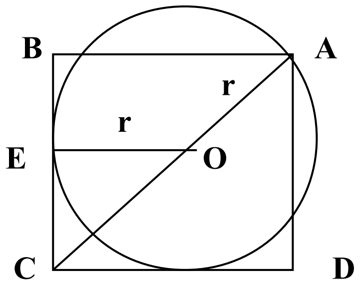
Megoldás:
A szálloda 100%-os kihasználtságát tekinthetjük úgy is, hogy havonta maximum 100 vendéget tud fogadni. **2p**
A feladat szövege alapján 3 hónapon keresztül 88%-os a kihasználtság azt jelenti, hogy $3 \cdot 88 = 264$ vendég volt a szállodában a nyári hónapokban összesen. **2p**
A többi 9 hónapon át havi 44 vendég, összesen $9 \cdot 44 = 396$ vendég jelent meg. **2p**
Az év során tehát összesen 660 vendége volt a szállodának. **1p**
Átlagosan $\frac{660}{12} = 55$ vendéget jelent. **2p**
Tehát a szálloda kihasználtsága egész évre vonatkozóan 55%-os volt. **1p**

2. feladat:
Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben az első két számjegy összeolvasásával kapott kétjegyű számhoz a harmadik és a negyedik számjegyet hozzáadva az utolsó két számjegy összeolvasásával kapott kétjegyű számot kapjuk? **10p**

Megoldás:
Legyen a keresett szám $\overline{abcd}$ alakú. A feladat szerint $\overline{ab} + c + d = \overline{cd}$ **2p**
Átírva az egyenletet, 10a+b+c+d=10c+d **1p**
Tehát 10a+b=9c **1p**
Az első két számjegyből alkotott kétjegyű szám 9-cel osztható. **2p**
A c lehetséges értékei ekkor 2, 3, 4, 5,6,7, 8, 9. Ez összesen 8 lehetőség. **2p**
Az egyenlet rendezése mutatja, hogy d értékétől független, tehát d bármilyen számjegy lehet. Ez 10 lehetőség. **1p**
Így összesen $8 \cdot 10 = 80$ ilyen szám létezik. **1p**

3. feladat:
Adott egy 10 cm oldalú négyzet. Mekkora a sugara annak a körnek, amely átmegy a négyzet egyik csúcsán és érinti a szemközti csúcsban találkozó oldalakat? **10p**

Megoldás:



1p

A kör középpontja a négyzet átlóján helyezkedik el. **1p**

Az OA távolság a sugárral egyezik meg. Az EO távolság is a sugárral egyezik meg. **2p**

Az EC= r , ezért OEC derékszögű háromszög egyenlő szárú. Az AC = $\sqrt{2}\cdot 10\text{cm}$. **2p**

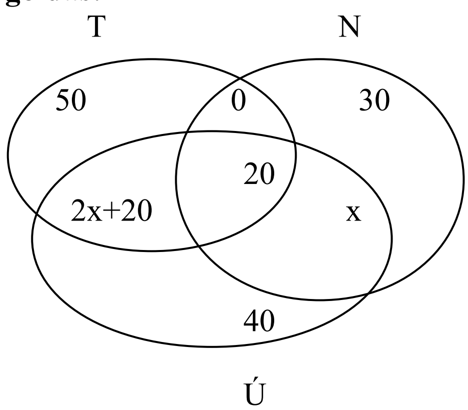
OC=$\sqrt{2}\cdot r$, az AC =$\sqrt{2}\cdot r + r = \sqrt{2}\cdot 10$ cm **2p**

$r\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{2}\cdot 10\text{cm}$ **1p**

$r = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 10}{\sqrt{2}+1}$ cm ≈ 5,86 cm **1p**

4. feladat:
Egy iskola diákjai közt felmérést végeztek arról, hogy honnan tájékozódnak a hírekről. Három lehetséges forrást jelöltek meg, amiből választhattak: újság, televízió, internet. Azok, akik válaszoltak, mind bejelöltek legalább egyet a három közül. 20-an jelölték be mindhárom forrást. Az olyan diákok száma, akik egyetlen forrásból tájékozódnak: 30-an internet, 40-en újság, 50-en TV. Azon tanulók száma, akik újságot olvasnak és az interneten is követik az eseményeket (esetleg TV-t is néznek) fele annyi volt, mint azok száma, akik TV-t néznek és újságot is olvasnak (esetleg még neteznek is). A felmérésből az is kiderült, hogy azok, akik mindkét elektronikus médiát figyelemmel kísérik, újságot is olvasnak. Volt 10 olyan diák is, akik nem voltak hajlandók válaszolni a kérdésekre. Hány embert kérdeztek meg a felmérésben, ha tudjuk, hogy 125-en voltak olyanok, akik legalább az újságot olvassák? **10p**

Megoldás:



A szöveg alapján: $|T \cap N \cap U| = 20$, $|N/(U \cup T)| = 30$, $|U/(N \cup T)| = 40$,
$|T/(U \cup N)| = 50$, **2p**

$T \cap N = T \cap N \cap U \Rightarrow (T \cap N)/U = \emptyset$ **1p**

Jelölje x az $(N \cap U)/T$ halmaz elemszámát. Így $|U \cap N| = x + 20$, amiből
$|U \cap T| = 2 \cdot (x+20)$, **2p**

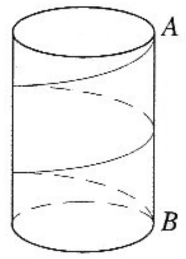
azaz $|(U \cap T)/N| = 2x + 20$, tehát $|U| = 40 + 2 \cdot (x+20) + x = 3x + 80 = 125$ **2p**

Azaz x=15

$|U \cup T \cup N| = 30 + 40 + 50 + 20 + x + (2x+20) = 160 + 3x = 205.$ **2p**

Összesen 215 embert kérdeztek meg a felmérésben. **1p**

5. feladat:
A 10 cm magas henger alakú konzervdoboz tetején az „A” pontban áll egy bogár. A pontosan alatta lévő „ B” pontba az ábrán látható módon a henger palástján kétszer „körbejárva” jut el. Hány cm a konzervdoboz alapkörének kerülete, ha az így megtett legrövidebb út hossza 26 cm? **10p**



Megoldás:

Jelöljük e henger alapkörének kerületét **k-**val! Terítsük ki a hengerpalástot a síkba!
A kiterített hengerpatást téglalap. **1p**
A bogár kétszer kerüli meg a palástot, ezért a síkba kiterített palástot is kétszer vesszük az ábrán látható módon. A bogár az „A” pontból a „B” pontba a feladat szerint a lehető legrövidebb úton jut el. Az út hossza 26 cm. A két pont között a legrövidebb távolság a két pontot összekötő szakasz hossza. **3p**
Az AB út egy 10 cm és 2k befogójú derékszögű háromszög átfogója. **2p**
Pitagorasz-tétel alkalmazásával $\overline{AB}^2 = 10^2 + (2k)^2$ **2p**
Tehát $26^2 = 10^2 + 4k^2$. Ebből k=12 cm. **2p**

6. feladat:
Adott a síkon 10 pont úgy, hogy semelyik 3 pont nincs egy egyenesen. Összekötöttünk minden pontpárt egy-egy egyenes szakasszal. Legfeljebb hány összekötő szakaszt metszhet egy olyan egyenes, amelyre az adott pontok egyike sem illeszkedik?
10p
Megoldás:
Ha az egyenes egyik oldalán x, a másik oldalán y pont található, akkor az egyenes csak azokat az összekötő szakaszokat metszi, melyek az egyenes különböző oldalain lévő pontokat kötnek össze. **1p**
Ilyenből $x \cdot y$ darab van. Mivel a pontok száma 10, ezért x+y=10. Az **2p**
$x \cdot y$ maximumát kell meghatározni, ahol x, y egész szám. Lehetőségek:
$x \cdot y = 1 \cdot 9$, vagy $x \cdot y = 2 \cdot 8$, vagy $x \cdot y = 3 \cdot 7$, vagy $x \cdot y = 4 \cdot 6$, vagy $x \cdot y = 5 \cdot 5$ **5p**
Tehát a metszéspontok száma akkor lesz a lehető legnagyobb, ha az egyenes mindkét oldalán 5-5 pont helyezkedik el. Ebben az esetben a metszéspontok száma 25. **2p**